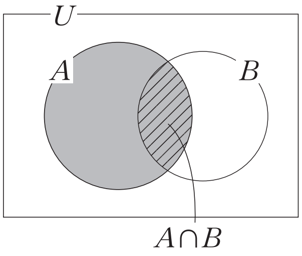
第 6 講　条件付き確率，期待値

PART1 条件付き確率

要点 ① 条件付き確率

事象 A が起こったとわかっているときの，事象 B が起こる確率を，A が起こったときの B の起こる「　　　　　　　　　　」といい，「　　　　」と表す。

$$P_A(B)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$



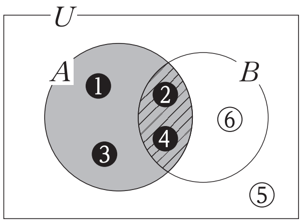
事象 A が起こったとわかっているので，事象 A を「全事象」と考えた上で，事象「$A\cap B$」が起こる場合の確率を考えればよい。

例 赤玉 4 個と白玉 2 個が入っている袋があり，赤玉には 1 から 4 まで，白玉には 5 と 6 の数字が書かれている。この袋の中から 1 個の玉を取り出したとき，玉の色が赤であった。このとき，その玉に書かれた数字が偶数である確率を求めたい。

赤玉が出る事象を A，玉に書かれた数字が偶数である事象を B とすると，求める条件付き確率は

$$P_A(B)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=$$

である。



「赤玉が出る」ことが前提なので，赤玉 4 個を母集団と考え，その中の偶数を考える。

上の例は，右のような表に整理することができる。これをもとに，「取り出した玉の色が白であったとき，その番号が偶数である」条件付き確率は

A \ B	B	$\overline{B}$
A	❷　❹	❶　❸
$\overline{A}$	⑥	⑤

$$P\ (\quad)=\frac{n(\qquad)}{n(\quad)}=$$

であることがわかる。

要点② 確率の乗法定理

条件付き確率の定義式

$$P_A(B)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)} \quad \cdots\cdots ①$$

①の式の右辺の分母・分子を，全事象 U の起こる場合の数 $n(U)$ で割ると，次の式が得られる。

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \quad \cdots\cdots ②$$

②の式の分母を払うと，次の等式が成り立つ。

確率の乗法定理

$$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$$

例 赤玉4個と白玉2個が入っている袋から，玉を1個取り出し，もとに戻さず続けてもう1個の玉を取り出す。このとき，2個とも赤玉である確率を求める。

1個目が赤玉である事象を A，2個目が赤玉である事象を B とする。

1個目が赤玉である確率は　$=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ である。

1個目が赤玉であるとき，残りの玉は赤玉　個，白玉　個である。この中から赤玉を取り出す確率は　=　である。

よって，2個とも赤玉である確率は，確率の乗法定理により

$$P(A\cap B)=\quad\times\quad=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

2つの試行S，Tにおいて，試行Sで事象 A が起こり，かつ試行Tで事象 B が起こる確率 $P(A\cap B)$ は

S，Tが「独立」，つまり互いの結果に影響を及ぼさない場合は

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B) \text{（独立な試行の確率）}$$

S，Tが「独立ではない」，つまりSの結果によってTの結果が変化する場合は

$$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B) \text{（確率の乗法定理）}$$

である。

1 当たりくじ4本を含む20本のくじがある。引いたくじはもとに戻さないとして，1本ずつ2回続けてくじを引く。このとき次の確率を求めよ。

(1)　1回目に当たりくじを引いたとき，2回目も当たりくじを引く確率

(2)　2回とも当たりくじを引く確率

(3)　2回目に当たりくじを引く確率

Point Pickup

条件付き確率

事象Aが起こったときに事象Bが起こる確率(Aが起こったときのBの起こる条件付き確率)は

$$P_A(B)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}\quad \cdots\cdots ①\qquad P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\quad \cdots\cdots ②$$

②は，確率や割合がわかっている場合に用いるとよい。

確率の乗法定理

事象A，Bがともに起こる確率$P(A\cap B)$は

$$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$$

$P_A(B)$は，事象Aが起こったあとの状態を考え，その状態で事象Bが起こるときの確率を考える。

第 6 講 PART1 確認問題

当たりくじ 3 本を含む 10 本のくじがある。引いたくじはもとに戻さないとして，1 本ずつ 2 回続けてくじを引く。

1 1 回目にはずれくじを引いたとき，2 回目に当たりくじを引く確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

2 2 回とも当たりくじを引く確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$ である。

3 2 回目に当たりくじを引く確率は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}$ である。

第 6 講　条件付き確率，期待値

PART1　条件付き確率

1　当たりくじ 4 本を含む 20 本のくじがある。引いたくじはもとに戻さないとして，1 本ずつ 2 回続けてくじを引く。このとき次の確率を求めよ。

(1)　1 回目に当たりくじを引いたとき，2 回目も当たりくじを引く確率

(2)　2 回とも当たりくじを引く確率

(3)　2 回目に当たりくじを引く確率

[解答]

(1)　1 回目に当たりくじを引く事象を A，2 回目に当たりくじを引く事象を B とする。

求める確率は，A が起こったときの B の起こる条件付き確率であることより

$$P_A(B)=\frac{3}{19}$$

(2)　事象 A が起こる確率は $P(A)=\frac{4}{20}\left(=\frac{1}{5}\right)$

よって求める確率は，$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)=\frac{4}{20}\times\frac{3}{19}=\frac{3}{95}$

(3)　2 回目に当たりくじを引く事象は，次の [1]，[2] のいずれか。

[1]　1 回目に当たり，2 回目も当たる

この事象の確率は，(2)より　$\frac{3}{95}$

[2]　1 回目ははずれ，2 回目は当たる

この事象の確率は $P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B)=\frac{16}{20}\times\frac{4}{19}=\frac{16}{95}$

[1]，[2] は互いに排反である。よって，求める確率は

$$\frac{3}{95}+\frac{16}{95}=\frac{19}{95}=\frac{1}{5}$$

第 6 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：3

[解説]

1回目に当たりくじを引くという事象を A，2回目に当たりくじを引くという事象を B とする。

求める確率は，$\overline{A}$ が起こったときの B が起こる条件付き確率である。

2回目の試行では，9本のくじの中に当たりくじが3本あるから，[A]

$$P_{\overline{A}}(B)=\frac{3}{9}=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

[A]　1回目の試行が終わったあとでの確率を考える。

$$P_{\overline{A}}(B)=\frac{n(\overline{A}\cap B)}{n(\overline{A})}$$

2

[正解] ウ：1，エオ：15

[解説]

1回目に当たりくじを引くという事象を A，2回目に当たりくじを引くという事象を B とする。

事象 A の起こる確率は，$P(A)=\frac{3}{10}$

事象 A が起こったときに B が起こる条件付き確率は，

$$P_A(B)=\frac{2}{9}$$ [B]

よって，求める確率は，

$$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$$ [C]

$$=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}=\mathbf{\frac{1}{15}}$$

[B]　1回目に当たりくじを引いているので，2回目には，9本の中に当たりくじが2本ある。

[C]　確率の乗法定理
$P(A\cap B)=P(A)P_A(B)$

3 **[正解]カ**：3，**キク**：10

[解説]

1回目に当たりくじを引くという事象をA，2回目に当たりくじを引くという事象をBとする。

2回目に当たりくじを引くのは，次の〔1〕，〔2〕のいずれかである。

〔1〕1回目，2回目とも当たりくじを引く確率は，

$$P(A \cap B) = \frac{1}{15}$$

〔2〕1回目にはずれくじを引き，2回目に当たりくじを引く確率は，

$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B) \quad \text{[D]}$$

$$= \frac{7}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{30}$$

〔1〕，〔2〕は互いに排反であるから，求める確率は，

$$\frac{1}{15} + \frac{7}{30} = \frac{9}{30} = \mathbf{\frac{3}{10}}$$

[D]　求める確率は $P(\overline{A} \cap B)$ である。確率の乗法定理より求める。（2つの試行は独立でない。）